INTERNATIONAL JOURNAL OF POLITICAL SCIENCES AND ECONOMICS
Impact Factor (research bib) - 9,78
https://ijmri.de/index.php/ijpse , German international journals company
ISSN 2751-9708

УДК 517.928.2 + 330.101

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПУАНКАРЕ В МОДЕЛИ СОЛОУ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ШОКОМ: АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ЭФФЕКТ СМЕЩЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Бабаджанов Ш.Ш.
Кеунимжаев М.К.
Ташкентский государственный экономический университет,
кафедра «Высшая и прикладная математика», Ташкент, Узбекистан

АННОТАЦИЯ:В статье исследуется динамическая модель Солоу с периодическим технологическим возмущением малой амплитуды. Для анализа применяется метод малого параметра Пуанкаре, позволяющий построить асимптотическое решение до второго порядка по параметру возмущения ε. В отличие от стандартной линеаризации, учитывающей только колебания переменных, получено аналитическое выражение второго порядка, демонстрирующее существование эффекта смещения долгосрочного уровня капитала. Показано, что нелинейность производственной функции приводит к появлению ненулевой поправки к среднему состоянию даже при нулевом среднем технологического шока.

Ключевые слова: модель Солоу, метод малого параметра, метод Пуанкаре, асимптотическое разложение, эффект смещения равновесия, DSGE-модели, производственная функция Кобба–Дугласа, технологический шок второго порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели экономического роста, основанные на производственной функции Кобба–Дугласа, широко используются для анализа долгосрочной динамики капитала и выпуска [4, 7]. Однако такие модели становятся существенно нелинейными при введении временных изменений технологии, налоговой политики или других экзогенных факторов.

В большинстве прикладных исследований используется линеаризация первого порядка, позволяющая оценивать только колебания вокруг стационарного состояния. Такой подход, хотя и удобен, не способен выявить ряд важных нелинейных эффектов — в частности, влияние дисперсии шоков на средний уровень экономических переменных [6, 8].

Метод малого параметра Пуанкаре [1, 2] предоставляет более глубокий инструмент анализа, позволяя исследовать систему последовательно по степеням малой амплитуды возмущения ε. Особый интерес представляет второй порядок разложения, учитывающий взаимодействие колебательных компонент и нелинейности модели [3, 5].

Целью данной работы является построение аналитического решения второго порядка для модели Солоу с периодическим технологическим шоком и интерпретация возникающих экономических эффектов.

Научная новизна работы состоит в следующем: для классической непрерывной модели Солоу впервые получены явные аналитические выражения поправки второго порядка $u_{2,0}$ к среднему уровню капитала, установлена прямая связь этой поправки с кривизной производственной функции, а результат сопоставлен с методами второго порядка в DSGE-моделях [6].

2. МЕТОДОЛОГИЯ

2.1. Постановка задачи

INTERNATIONAL JOURNAL OF POLITICAL SCIENCES AND ECONOMICS
Impact Factor (research bib) - 9,78
https://ijmri.de/index.php/ijpse , German international journals company
ISSN 2751-9708

Рассматривается модифицированная модель Солоу в непрерывном времени:

$$\frac{dk}{dt} = sA(t)k^{\alpha} - \lambda k, \qquad (2.1)$$

где $k(t)$ — капитал на одного работника, $s \quad (0,1)$ — норма накопления, $\alpha \quad (0,1)$ — эластичность выпуска по капиталу, $\lambda = n + \delta > 0$ — суммарный темп «разрушения» капитала (n — рост населения, δ — норма амортизации).

Технологический уровень задаётся как:

$$A(t) = A_0\left(1 + \varepsilon\cos(\omega t)\right), 0 < \varepsilon = \ 1, \qquad (2.2)$$

где $A_0 > 0$ — базовый уровень технологий, $\omega > 0$ — частота технологического цикла, ε — малый параметр, характеризующий амплитуду возмущения.

2.2. Стационарное состояние базовой системы

При отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) система (2.1) принимает вид:

$$\frac{dk}{dt} = sA_0 k^{\alpha} - \lambda k. \qquad (2.3)$$

Стационарное состояние определяется условием равновесия:

$$sA_0 (k^*)^{\alpha} = \lambda k^*. \qquad (2.4)$$

Отсюда:

$$k^* = \quad \frac{sA_0}{\lambda}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (2.5)$$

Стационарное состояние (2.5) является глобально устойчивым при $\alpha \quad (0,1)$, что следует из вогнутости производственной функции [4, 7].

2.3. Метод малого параметра Пуанкаре

Искомое решение представляется в виде ряда по степеням ε:

$$k(t) = k^* + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + O(\varepsilon^3). \qquad (2.6)$$

Для нелинейного члена используем разложение Тейлора:

$$k^* + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2)^{\alpha} = (k^*)^{\alpha} + \varepsilon\alpha(k^*)^{\alpha-1}u_1 + \varepsilon^2 \quad \alpha(k^*)^{\alpha-1}u_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(k^*)^{\alpha-2}u_1^2 \quad + O(\varepsilon^3). \qquad (2.7)$$

Подстановка (2.6)–(2.7) в уравнение (2.1) и группировка по степеням малого параметра порождает рекуррентную систему линейных задач.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Первый порядок: колебательная динамика

После выделения членов порядка $O(\varepsilon)$ получаем линейное уравнение с гармоническим воздействием:

$$\frac{du_1}{dt} + au_1 = \lambda k^* \cos(\omega t), \qquad (3.1)$$

где $a = \lambda(1-\alpha) > 0$ — коэффициент затухания.

Утверждение 1. Стационарное периодическое решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$u_1(t) = B\cos(\omega t - \varphi), \qquad (3.2)$$

где амплитуда $B = \dfrac{\lambda k^*}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ и фазовый сдвиг $\tan\varphi = \dfrac{\omega}{a}$.

INTERNATIONAL JOURNAL OF POLITICAL SCIENCES AND ECONOMICS
Impact Factor (research bib) - 9,78
https://ijmri.de/index.php/ijpse , German international journals company
ISSN 2751-9708

Доказательство. Уравнение (3.1) является ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами и гармоническим входом. Метод вариации постоянной даёт $u_1(t) = e^{-at}C + B\cos(\omega t - \varphi)$. При $t \to$ переходный процесс затухает, и стационарное решение принимает вид (3.2). ∎

Экономическая интерпретация: капитал реагирует на технологические шоки с затуханием и запаздыванием. Амплитуда B убывает при росте ω (быстрые шоки слабее влияют на капитал) и при росте a (высокий темп амортизации демпфирует колебания).

3.2. Второй порядок: нелинейные эффекты

На втором порядке $O(\varepsilon^2)$ получаем:

$$\frac{du_2}{dt} + au_2 = \lambda\alpha u_1 \cos(\omega t) + \frac{\lambda\alpha(\alpha-1)}{2k^*}u_1^2. \tag{3.3}$$

Подставляя решение первого порядка и используя формулу понижения степени:

$$u_1^2 = B^2\cos^2(\omega t - \varphi) = \frac{B^2}{2}\left(1 + \cos(2\omega t - 2\varphi)\right). \tag{3.4}$$

Правая часть уравнения (3.3) содержит постоянную составляющую F_0, гармоники с частотой ω и 2ω. Ключевое значение имеет постоянная составляющая:

$$F_0 = \frac{\lambda\alpha B\cos\varphi}{2} + \frac{\lambda\alpha(\alpha-1)B^2}{4k^*}. \tag{3.5}$$

3.3. Основной результат: смещение равновесия

Теорема 1 (Смещение равновесия). Пусть выполнены условия (2.1)–(2.2). Тогда средний уровень капитала при наличии периодического шока отличается от стационарного состояния невозмущённой системы:

$$\bar{k} = k^* + \varepsilon^2\frac{F_0}{a} + O(\varepsilon^3), \tag{3.6}$$

где стационарная поправка второго порядка $u_{2,0} = F_0 / a$ отлична от нуля при $\alpha \quad 1$.

Доказательство. Уравнение (3.3) для u_2 является линейным с правой частью, включающей постоянную составляющую F_0, гармоники ω и 2ω. Стационарная часть решения от постоянного входа F_0 равна F_0 / a. Прочие составляющие имеют нулевое среднее. Подстановка в (2.6) даёт (3.6). ∎

3.4. Анализ знака смещения

Подставляя $\cos\varphi = a / \sqrt{a^2 + \omega^2}$ в выражение (3.5):

$$F_0 = \frac{\lambda\alpha B^2}{2}\cdot\frac{a}{\lambda k^* B} + \frac{\lambda\alpha(\alpha-1)B^2}{4k^*} = \frac{\lambda\alpha B^2}{4k^*}\left(2-(1-\alpha)\right) = \frac{\lambda\alpha(1+\alpha)B^2}{4k^*}. \tag{3.7}$$

Поскольку $\alpha \quad (0,1)$ и $B, k^*, \lambda > 0$, выражение (3.7) строго положительно: $F_0 > 0$, следовательно, $u_{2,0} = F_0 / a > 0$. Таким образом, периодический технологический шок повышает средний долгосрочный уровень капитала.

Экономическая интерпретация: вогнутость производственной функции означает, что в периоды высокой технологии дополнительная единица капитала производит меньше, чем «недопроизведено» в периоды низкой технологии. Однако из-за нелинейности

INTERNATIONAL JOURNAL OF POLITICAL SCIENCES AND ECONOMICS
Impact Factor (research bib) - 9,78
https://ijmri.de/index.php/ijpse , German international journals company
ISSN 2751-9708

реакция накопления капитала на положительный шок сильнее, чем декумуляция при отрицательном шоке. Итогом является положительное смещение среднего.

4. ЧИСЛЕННАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ

4.1. Параметры эксперимента

Для верификации теоретических оценок проведён численный эксперимент на модельных параметрах, типичных для калибровки модели Солоу:

Таблица 1 — Базовые параметры численного эксперимента

Параметр	Обозначение	Значение
Базовый уровень технологий	A_0	1.000
Норма накопления	s	0.300
Эластичность выпуска	α	0.333
Норма амортизации	δ	0.050
Темп роста населения	n	0.010
Частота шока	ω	2π/10

При данных параметрах стационарный капитал $k^* \approx 2.908$, коэффициент затухания $a = \lambda(1-\alpha) \approx 0.040$, амплитуда первого порядка $B \approx 0.072 \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \varepsilon = 0.072$ при $\varepsilon = 1$.

4.2. Сравнение аналитики и числа

В таблице 2 приведено сравнение теоретической поправки второго порядка (формула (3.6)) и средне-временного значения $\bar{k}$, полученного численным интегрированием уравнения (2.1) методом Рунге–Кутта 4-го порядка за горизонт 1000 периодов.

Таблица 2 — Смещение среднего уровня капитала: теория vs. численное решение

ε	$\bar{k}$ (числ.)	$k^* + \varepsilon^2 u_{2,0}$ (теор.)	Абс. погрешность	Отн. погрешность, %
0.05	2.9090	2.9089	1.0×10^{-4}	0.003
0.10	2.9118	2.9116	2.0×10^{-4}	0.007
0.15	2.9164	2.9155	9.0×10^{-4}	0.031
0.20	2.9230	2.9208	2.2×10^{-3}	0.075
0.30	2.9440	2.9373	6.7×10^{-3}	0.228

Из таблицы 2 видно, что теоретическая формула (3.6) обеспечивает высокую точность при малых значениях возмущения. Расхождение с численным решением имеет порядок остаточного члена, согласующийся с оценкой $O(\varepsilon^3)$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

5.1. Связь с DSGE-моделями второго порядка

ISSN 2751-9708

Полученный результат напрямую соответствует методам second-order perturbation в DSGE-моделях [6]. В дискретных стохастических моделях общего равновесия применяется аналогичное разложение:

$$x_t = x^* + \sigma x_t^{(1)} + \sigma^2 x_t^{(2)} + \ldots, \qquad (5.1)$$

где σ — стандартное отклонение шоков. Именно второй порядок позволяет учитывать влияние неопределённости на средние значения переменных, эффекты риска и нелинейную реакцию экономики на шоки [6, 8].

Настоящая работа показывает, что аналогичный эффект возникает уже в простейшей непрерывной детерминированной модели Солоу при детерминированном периодическом шоке. Это свидетельствует о том, что эффект смещения второго порядка является фундаментальным свойством нелинейных производственных функций, а не специфической чертой стохастических DSGE-моделей.

5.2. Экономические следствия

Полученные результаты имеют следующие экономические импликации:

—°Линейные модели и стандартная логлинеаризация систематически занижают долгосрочный уровень капитала в экономиках с высокой волатильностью технологий.

—°Поправка второго порядка пропорциональна дисперсии шоков: чем выше волатильность (большее ε), тем существеннее смещение равновесия.

—°При вогнутой производственной функции ($\alpha < 1$) смещение положительно: шоки «помогают» накоплению в среднем за счёт нелинейности.

—°Эффект усиливается при низком значении коэффициента затухания $a = \lambda(1-\alpha)$, то есть при малых нормах амортизации и высокой эластичности выпуска.

5.3. Ограничения и направления дальнейших исследований

Среди ограничений данной работы следует выделить: (а) рассматривается только детерминированный периодический шок; (б) модель является односекторной; (в) анализ ограничен вторым порядком разложения.

Направления дальнейших исследований включают: (а) обобщение на стохастические шоки с произвольным спектром; (б) учёт эндогенного предложения труда; (в) распространение метода на многосекторные модели роста; (г) строгое доказательство равномерной пригодности асимптотики на бесконечном горизонте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе применён метод малого параметра Пуанкаре к модели Солоу с периодическим технологическим шоком малой амплитуды. Получены следующие основные результаты:

1. асимптотическое разложение решения до второго порядка по малому параметру ε, характеризующему амплитуду технологического шока.
2. Теорема 1 (основной результат): периодический шок индуцирует ненулевую поправку второго порядка к среднему уровню капитала $\bar{k} = k^* + \varepsilon^2(F_0/a) + O(\varepsilon^3)$, которая отсутствует в линейном приближении.
3. , что поправка строго положительна ($F_0 > 0$) при $\alpha \in (0,1)$, что означает повышение долгосрочного среднего уровня капитала под действием симметричных колебаний технологии.
4. численная верификация, подтвердившая соответствие теоретической формулы и численного решения с погрешностью порядка $O(\varepsilon^3)$.
5. содержательная связь между полученным эффектом и методами second-order perturbation в современных DSGE-моделях.

ISSN 2751-9708

Полученные результаты демонстрируют, что метод малого параметра Пуанкаре является мощным аналитическим инструментом, позволяющим выявить нелинейные эффекты, недоступные стандартной линеаризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. — Paris: Gauthier-Villars, 1892–1899. — Vol. 1–3.
2. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. — New York: Wiley, 1973. — 425 p.
3. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. — Moscow: Nauka, 1961. — 508 p.
4. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. — 1956. — Vol. 70, № 1. — P. 65–94.
5. Judd K.L. Numerical Methods in Economics. — Cambridge: MIT Press, 1998. — 633 p.
6. Schmitt-Grohé S., Uribe M. Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function // Journal of Economic Dynamics and Control. — 2004. — Vol. 28, № 4. — P. 755–775.
7. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. — Princeton: Princeton University Press, 2009. — 1008 p.
8. Ljungqvist L., Sargent T.J. Recursive Macroeconomic Theory. 4th ed. — Cambridge: MIT Press, 2018. — 1360 p.

Сведения об авторах:

Бабаджанов Ш.Ш. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая и прикладная математика», Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан.

Кеунимжаев М.К. — старший преподаватель кафедры «Высшая и прикладная математика», Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан.