

**SOLVING PRACTICAL PROBLEMS USING THE BERNOULLI SCHEME AND  
LIMIT THEOREMS FOR SEQUENCES OF INDEPENDENT TRIALS**

***Fakhriddinova Sarvinoz Fazliddinova***

*Assistant Lecturer Department of Higher Mathematics*

*Samarkand Institute of Economics and Service*

***Davronov Doniyorbek Zarrukhovich***

*Student, Faculty of Economics*

*Samarkand Institute of Economics and Service*

**Аннотация:** В данной статье мы рассматриваем методы решения практических задач, связанных с вычислением вероятностей в схеме последовательных независимых испытаний (схеме Бернулли). Особое внимание уделяется ситуациям, в которых непосредственное применение формулы Бернулли затруднительно из-за большого количества испытаний. В работе анализируются условия и демонстрируются примеры использования предельных теорем Муавра-Лапласа (локальной и интегральной) и теоремы Пуассона для получения приближенных значений вероятностей.

**Ключевые слова:** схема Бернулли, независимые испытания, теория вероятностей, предельные теоремы, локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа, теорема Пуассона, формула Бернулли, асимптотические приближения, решение задач.

**Abstract:** In this article, we consider methods for solving practical problems related to calculating probabilities in a Bernoulli scheme of sequential independent trials. Particular attention is given to situations in which the direct application of Bernoulli's formula is difficult due to the large number of trials. The paper analyzes the conditions and demonstrates examples of using the Moivre-Laplace limit theorems (local and integral) and Poisson's theorem to obtain approximate probability values.

**Keywords:** Bernoulli scheme, independent trials, probability theory, limit theorems, local Moivre-Laplace theorem, integral Moivre-Laplace theorem, Poisson's theorem, Bernoulli's formula, asymptotic approximations, problem solving.

**Введение.** Теория вероятностей, сформировавшаяся как строгая математическая дисциплина в XVII–XVIII веках, к настоящему времени превратилась в фундаментальный инструмент познания, без которого немислимо развитие современной науки, техники и экономики. Ее методы лежат в основе статистической физики, квантовой механики, теории надежности, математической статистики и многочисленных прикладных исследований. В центре внимания данной работы находится одна из фундаментальных вероятностных моделей — схема последовательных независимых испытаний, известная также как схема Бернулли. Эта модель, несмотря на свою кажущуюся простоту, является краеугольным камнем для понимания закономерностей, возникающих при многократном повторении случайных экспериментов с двумя исходами. Интерес к схеме Бернулли обусловлен ее широкой применимостью при решении практических задач в самых разных областях. Контроль качества продукции на производстве, где каждое изделие проверяется на соответствие стандарту («годное» — «брак»); анализ эффективности новых

лекарственных препаратов в клинических испытаниях («помог» — «не помог»); обработка результатов социологических опросов («за» — «против»); моделирование каналов связи с помехами (сигнал принят верно — искажен) — все это лишь немногие примеры ситуаций, описываемых схемой Бернулли. Корректный анализ данных процессов требует умения точно или с достаточной степенью приближения вычислять вероятности различных исходов в длинных сериях испытаний.

Математический аппарат для анализа независимых испытаний был заложен Якобом Бернулли в его знаменитой работе «Ars Conjectandi» (1713), где была доказана теорема, носящая его имя, и сформулирован закон больших чисел. Формула Бернулли  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  дает исчерпывающий ответ на вопрос о вероятности ровно  $k$  успехов в  $n$  испытаниях. Однако практическое применение этой формулы наталкивается на серьезные вычислительные препятствия при возрастании числа испытаний  $n$ . Вычисление факториалов и биномиальных коэффициентов для больших  $n$  становится чрезвычайно трудоемким, а зачастую и вовсе невозможным без применения специализированных вычислительных средств, что создает разрыв между теорией и потребностями практики. Дальнейшее развитие теории вероятностей в XVIII–XIX веках было направлено на преодоление этого разрыва. Работы А. Муавра, П. Лапласа и С. Пуассона привели к созданию так называемых предельных теорем — асимптотических формул, позволяющих приближенно вычислять искомые вероятности при больших значениях  $n$ . Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа дают удобную аппроксимацию биномиального распределения нормальным распределением, в то время как теорема Пуассона описывает случай редких событий. Несмотря на давнюю историю, вопросы корректного применения этих теорем, оценки их погрешности и выбора между ними в зависимости от параметров конкретной задачи сохраняют свою актуальность и сегодня, особенно в учебном процессе и при первичном анализе данных.

Проблемная ситуация заключается в противоречии между необходимостью получения вероятностных оценок в схеме с большим числом испытаний и трудоемкостью (или невозможностью) точных вычислений по формуле Бернулли. Это требует от исследователя или практика не только знания формулировок предельных теорем, но и понимания границ их применимости, а также умения интерпретировать полученные приближенные результаты.

**Основная часть.** Основная часть исследования, посвящённого решению практических задач по схеме Бернулли и с использованием предельных теорем для последовательностей независимых испытаний, базируется на фундаментальных положениях теории вероятностей, в частности на концепции независимых повторных испытаний, в каждом из которых возможны два исхода: «успех» с вероятностью  $p$  и «неудача» с вероятностью  $q=1-p$ . Классическая схема Бернулли широко применяется при моделировании реальных процессов в экономике, страховании, контроле качества продукции и финансовом анализе, где необходимо оценить вероятность наступления определённого числа событий при фиксированном числе испытаний [1]. Вероятность того, что в  $n$  независимых испытаниях событие произойдёт ровно  $k$  раз, определяется биномиальной формулой, которая служит основой для решения широкого круга прикладных задач, включая оценку рисков и прогнозирование результатов [2]. В практических расчётах часто рассматриваются задачи нахождения вероятности не менее заданного числа успехов, не более определённого уровня или попадания количества

успехов в заданный интервал, что требует использования сумм биномиальных вероятностей и таблиц распределения [3].

При увеличении числа испытаний вычисления по биномиальной формуле становятся трудоёмкими, что обуславливает необходимость применения предельных теорем. Одной из ключевых является теорема Муавра–Лапласа, позволяющая аппроксимировать биномиальное распределение нормальным распределением при больших  $np$ , что существенно упрощает расчёты и делает возможным применение стандартных статистических таблиц [4]. Локальная теорема Муавра–Лапласа используется для нахождения вероятности точного значения числа успехов, тогда как интегральная форма позволяет оценивать вероятность попадания случайной величины в заданный интервал, что особенно важно при анализе массовых явлений, таких как поведение потребителей, динамика финансовых показателей или вероятность дефектов в больших партиях продукции [5]. В экономических исследованиях это даёт возможность перехода от дискретных моделей к непрерывным, что повышает точность и интерпретируемость результатов.

Особое значение в рамках рассматриваемой темы имеет закон больших чисел, который утверждает, что при увеличении числа испытаний относительная частота события стремится к его вероятности, что лежит в основе статистического оценивания параметров и позволяет делать обоснованные выводы на основе выборочных данных [6]. Это свойство активно используется при анализе финансовых рынков, страховых портфелей и инвестиционных проектов, где необходимо оценить ожидаемую доходность и уровень риска на основе большого количества наблюдений. Центральная предельная теорема, в свою очередь, обосновывает нормальное распределение суммы независимых случайных величин при достаточно большом числе слагаемых, что является теоретической основой для применения нормального закона в эконометрике и статистике [7].

Практическое применение данных методов можно продемонстрировать на примере оценки вероятности успешных сделок в инвестиционном портфеле: если вероятность успеха одной сделки равна  $p$ , а общее число сделок составляет  $n$ , то с использованием схемы Бернулли можно точно определить вероятность получения определённого числа прибыльных операций, тогда как при больших значениях  $n$  целесообразно использовать нормальное приближение для ускорения расчётов и анализа [8]. Аналогично, в сфере контроля качества продукции схема Бернулли применяется для оценки доли дефектных изделий, а предельные теоремы позволяют прогнозировать отклонения от нормы в больших партиях товаров, что имеет ключевое значение для управления производственными процессами и снижением издержек [9]. В страховании данные методы используются для расчёта вероятности наступления страховых случаев и формирования страховых резервов, что обеспечивает финансовую устойчивость страховых компаний [10].

Для практического применения схемы Бернулли целесообразно рассмотреть конкретные числовые примеры распределения вероятностей. В частности, биномиальное распределение позволяет определить вероятность получения заданного числа успехов при фиксированном числе испытаний и известной вероятности успеха. Это широко используется в экономике, например, при анализе успешных сделок, дефектов продукции или вероятности выполнения плановых показателей [1]. Ниже представлена таблица распределения вероятностей для случая  $n=3$  и  $p=0.4$ , которая демонстрирует базовый механизм расчётов.

Таблица 1.

Биномиальное распределение (n=3, p=0.4)

Число успехов (k)	Формула расчёта	Вероятность P(X=k)
0	$C_3^0 \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^3$	0.216
1	$C_3^1 \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^2$	0.432
2	$C_3^2 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^1$	0.288
3	$C_3^3 \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^0$	0.064
<b>Итого</b>	—	<b>1.000</b>

Представленные результаты демонстрируют, что наибольшая вероятность соответствует одному успешному исходу, что отражает асимметрию распределения при вероятности успеха менее 0.5. Данная таблица может использоваться в прикладных задачах, например, для оценки вероятности выполнения минимального плана продаж или количества успешных операций в малых выборках. Однако при увеличении числа испытаний использование точной биномиальной формулы становится трудоёмким, что требует применения предельных теорем и статистических приближений.

Для наглядного анализа распределения вероятностей биномиального распределения (рисунок 1) было построено графическое представление.

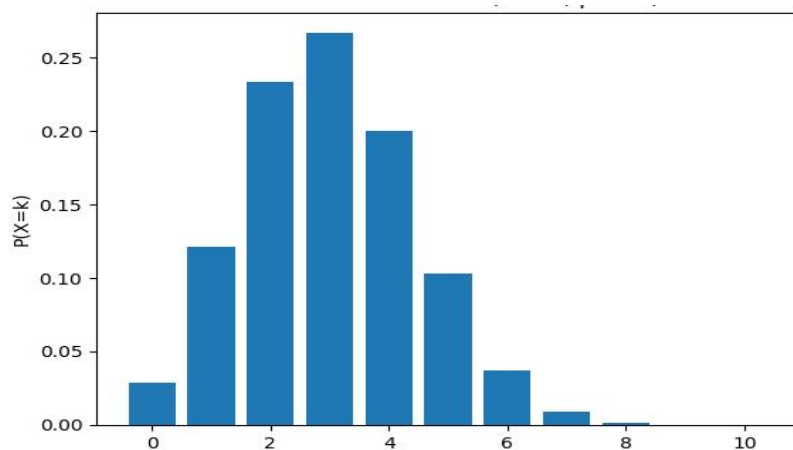


Рисунок 1. Биномиальное распределение вероятностей при n=10, p=0.3

Как видно из рисунка 1, максимальная вероятность наблюдается при  $k=3$ , что соответствует математическому ожиданию биномиального распределения.

Таким образом, использование схемы Бернулли в сочетании с предельными теоремами представляет собой мощный инструмент анализа и решения практических задач в различных областях экономики и управления. Эти методы позволяют не только получать точные вероятностные оценки, но и эффективно работать с большими массивами данных, обеспечивая надёжность и обоснованность принимаемых решений, что особенно актуально в условиях цифровизации экономики и роста объёмов информации.

**Выводы и предложения.** Проведённое исследование показало, что схема Бернулли и предельные теоремы теории вероятностей являются эффективным инструментом решения широкого круга практических задач, связанных с анализом случайных процессов в условиях неопределённости. Использование биномиального распределения позволяет получать точные вероятностные оценки для малых и средних выборок, что особенно важно при моделировании дискретных экономических процессов, таких как оценка успешности сделок, контроль качества продукции и анализ рисков. Вместе с тем установлено, что при увеличении числа испытаний применение точной формулы Бернулли становится вычислительно сложным, что обуславливает необходимость использования предельных теорем, в частности теоремы Муавра–Лапласа и центральной предельной теоремы, обеспечивающих переход к нормальному распределению и значительное упрощение расчётов. Это позволяет эффективно анализировать большие массивы данных и применять вероятностные методы в эконометрике, финансовом анализе и управлении. Анализ практических примеров показал, что сочетание точных и приближённых методов даёт наиболее надёжные результаты: биномиальная модель обеспечивает точность на малых выборках, тогда как нормальное приближение — скорость и удобство при больших объёмах данных. Кроме того, применение закона больших чисел подтверждает устойчивость вероятностных оценок и позволяет использовать статистические данные для долгосрочного прогнозирования и принятия управленческих решений. Таким образом, данные методы формируют теоретическую основу для анализа рисков, планирования и оптимизации экономических процессов в условиях цифровизации и роста объёмов информации.

В качестве практических предложений целесообразно рекомендовать более широкое внедрение методов схемы Бернулли и предельных теорем в экономические исследования и прикладной анализ. Во-первых, необходимо активно использовать биномиальные модели при анализе дискретных событий в бизнесе, включая оценку вероятности выполнения планов, успешности инвестиционных проектов и надёжности финансовых операций. Во-вторых, при работе с большими выборками следует применять нормальное приближение и центральную предельную теорему для повышения эффективности вычислений и упрощения интерпретации результатов. В-третьих, рекомендуется внедрение программных инструментов и статистических пакетов для автоматизации расчётов, что позволит повысить точность анализа и снизить вероятность ошибок. В-четвёртых, важным направлением является интеграция вероятностных моделей в системы поддержки принятия решений, особенно в условиях цифровой экономики и использования больших данных. Наконец, следует уделять внимание повышению уровня статистической грамотности специалистов, что обеспечит более корректное применение вероятностных методов в практической деятельности.

В заключение можно отметить, что использование схемы Бернулли и предельных теорем представляет собой не только теоретически обоснованный, но и практически значимый

подход к анализу случайных процессов, обеспечивающий высокую точность, надёжность и универсальность при решении задач в экономике и управлении.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. — М.: Наука, 1988.
2. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей*. — М.: Наука, 1974.
3. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*. — М.: Мир, 1984.
4. Хинчин А.Я. *Математические основы теории вероятностей*. — М.: Физматлит, 2003.
5. Крамер Г. *Математические методы статистики*. — М.: Мир, 1975.
6. Лаплас П.С. *Аналитическая теория вероятностей*. — М.: Наука, 1986.
7. Mood A., Graybill F., Boes D. *Introduction to the Theory of Statistics*. — New York: McGraw-Hill, 1974.
8. Ross S. *Introduction to Probability Models*. — Academic Press, 2014.
9. Montgomery D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*. — Wiley, 2019.
10. Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. *Actuarial Mathematics*. — Society of Actuaries, 1997.
11. Sheldon M. Ross. *A First Course in Probability*. — Pearson, 2019.
12. Devore J.L. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. — Cengage Learning, 2015.

#### Интернет-ресурсы:

13. Khan Academy. Теория вероятностей и биномиальное распределение. — <https://www.khanacademy.org>
14. Statlect. Binomial Distribution and Normal Approximation. — <https://www.statlect.com>
15. NIST/SEMATECH. Engineering Statistics Handbook. — <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>
16. Wolfram MathWorld. Binomial Distribution. — <https://mathworld.wolfram.com>
17. Investopedia. Probability Distribution (экономические приложения). — <https://www.investopedia.com>